Particles in a box

חלקיקים בקופסא

אורי לכיש, רחובות
urila@zahav.net.il

חלקיק בקופסא

התנגשויות אלסטיות בין חלקיקי גז לבין קיר

חשוב על ההתנגשות האלסטית בין שני גופים בעלי מסות m ו- M נעים לאורך קו ישר [1,2]. המהירויות של גופים אלה לפני ההתנגשות בינן הן v_m, ו- v_M, ואחרי ההתנגשות הן $v_{m'}$ ו- $v_{M'}$. חוק השימור של תנע ליניארי קובע:

$$mv_m + Mv_M = mv_{m'} + Mv_{M'} \qquad (1)$$

וחוק שימור האנרגיה קובע:

$$mv_m^2 + Mv_M^2 = mv_{m'}^2 + Mv_{M'}^2 \qquad (2)$$

משני חוקים אלו מקבלים:

$$v_m - v_M = v_{M'} - v_{m'} \qquad (3)$$

גודל המהירות היחסית , נשמר בהתנגשות, אבל כוון התנועה מתהפך. וגם, ממשוואות (1) ו- (2) מתקבל:

$$(1 + m/M)\, v_{M'} – (1 – m/M)\, v_M = (m/M)\, 2v_m \qquad (4)$$

$$(1 + m/M)\, v_{m'} – (1 – m/M)\, v_m = (m/M)\, 2v_M \qquad (5)$$

כעת, תניח ש- m הוא גוף מיקרוסקופי ו- M הוא מקרוסקופי. לכן בגבול $m/M = 0$ מתקבל:

$$v_{M'} = v_M \qquad (6)$$

$$v_{m'} = -(v_m – 2v_M) \qquad (7)$$

כצפוי, מהירות הגוף המקרוסקופי אינה מושפעת מההתנגשות. גודל המהירות של הגוף המיקרוסקופי משתנה בכמות $2v_M$, וכוונה מתהפך. אם מהירות הגוף המקרוסקופי הרבה יותר נמוכה ממהירות הגוף המיקרוסקופי, $v_M << v_m$, אז האנרגיה הקינטית (ΔEk), שתעבור מגוף לגוף בהתנגשות, תהיה:

$$\Delta Ek = 2mv_m v_M \qquad (8)$$

אנרגיה זאת פרופורציונית למהירות הגוף המקרוסקופי ואינה תלויה במסה שלו. אנרגיה עוברת מהגוף המיקרוסקופי למקרוסקופי כאשר שניהם נעים באותו כוון, והיא עוברת בכוון הפוך כאשר הם נעים בכוונים מנוגדים.

תוצאות אלו ישמשו כעת לניתוח התכונות של גז כלוא בקופסא. למען הפשטות מניחים שהגז מונו-אטומי (כך שאין לו דרגות חופש פנימיות), ושחלקיקי הגז אינם מגיבים בינם.

לחץ הגז

חישוב הלחץ של הגז על הדפנות ידוע והוא יובא בקיצור.
האטומים אשר יכולים להתנגש בשטח קיר A של הקופסא במרווח הזמן Δt, נמצאים בתוך הנפח המוגדר על-ידי שטח הבסיס A והגובה $v\Delta t$, כאשר v המהירות הממוצעת שלהם.
כיוון שהם יכולים לנוע בכל הכוונים, רק 1/6 מהם יפגעו בקיר. לכן, המספר הממוצע של ההתנגשויות עם הקיר, במרווח הזמן Δt, הוא:

$$(1/6)(N/V)Av\Delta t \qquad (9)$$

N הוא מספר האטומים בקופסא ו- V הנפח שלה. בכל התנגשות מומנטום $2mv$ עובר לקיר, ולכן, המומנטום הכולל העובר לקיר במרווח הזמן Δt הוא:

$$F\Delta t = (1/3)\ (N/V)\ Av^2\Delta t \qquad (10)$$

לכן, לחץ הגז על הקיר יהיה:

$$p = F/A = (1/3)\ (N/V)\ Av^2 \qquad (11)$$

משוואת המצב של גז אידאלי, $pV = N\mathrm{k}T$, יכולה להתקבל ממשוואה (11) על-ידי השימוש בקשר התרמודינמי $\varepsilon_k = (1/2)\mathrm{k}T$, כאשר ε_k היא האנרגיה הממוצעת לדרגת חופש של חלקיק הגז. חישוב מדויק ,שמביא בחשבון את ההתפלגות האמיתית של המהירויות, מביא לאותה תוצאה.

אם הקיר A נע במהירות v_M, אז ,כל אטום, שמתנגש בפניו, יעביר אליו את האנרגיה הקינטית $2mvv_M$ (משוואה (8)). האנרגיה הכללית שעוברת לקיר במרווח הזמן Δt (לפי משוואה (9)) ומשוואה (11)) היא:

$$(1//3)\ (N/V)\ mv^2Av_M\Delta t = p\mathrm{d}V \qquad (12)$$

כאשר $\mathrm{d}V = Av_M\Delta t$ היא שינוי נפח הקופסא. (חישוב דומה בשלושה ממדים נמצא במראה מקום (1)).

החישוב הזה מראה שתהליך ההתנגשויות האלסטיות, בין האטומים של הגז לבין הקיר הנע, הוא המנגנון אשר על פיו האנרגיה התרמית של האטומים הופכת לתנועה מקרוסקופית מכנית. האפקט המצטבר של הרבה התנגשויות גורם לדחיפת הקיר, אבל במשך כל

התנגשות בודדת מעבר האנרגיה נקבע רק על-ידי מהירות הקיר באותו רגע. אלו הן תוצאות של חוקי שימור התנע והאנרגיה.

התפשטות אדיאבטית של גז

כאשר גז מחומם (או מקורר) דרך קיר, אטומים שפוגעים בו יעזבו את הקיר בטמפרטורה גבוהה (או נמוכה) יותר. במקרה זה, המהירות של האטום אחרי ההתנגשות אינה תלויה לגמרי במהירותו לפני התנגשות, בניגוד לתהליך של התנגשויות אלסטיות, שבהן הקשר חד-ערכי (משוואה (7)). לכן, התנגשויות אלסטיות אינן יכולות להעביר חום בין הגז לקירות. אם התהליך הוא של התנגשויות אלסטיות בלבד, הוא יהיה אדיאבטי.

המשוואות, המתארות התפשטות אדיאבטית של גז, מתקבלות כך:

מתוך משוואה (9) רואים כי ההסתברות שאטום בודד יתנגש עם הקיר במרווח הזמן Δt היא: $(l/6)(l/V)Av\Delta t$. בכל התנגשות כזאת האטום מפסיד, או מרוויח, מהירות $2v_M$ (משוואה (1)), כך שינוי המהירות, $\mathrm{d}v$, במרווח הזמן Δt, הוא:

$$\mathrm{d}v = -(v/3)(v_M A\Delta t/V) = -(v/3)(\mathrm{d}V/V) \tag{13}$$

אינטגרציה של משוואה זאת נותנת:

$$v/v_0 = (V_0/V)^{1/3} \tag{14}$$

או, בשימוש במשוואה (11):

$$P/P_0 = (V_0/V)^{5/3} \tag{15}$$

זאת המשוואה של התפשטות אדיאבטית של גז מונו-אטומי. בשימוש במשוואת הגז האידאלי, $pV = N\mathrm{k}T$, אפשר לרשום את ההתפשטות האדיאבטית בצורה: $T/T_0 = (V_0/V)^{2/3}$, או, $P/P_0 = (T/T_0)^{5/2}$. אפשר להרחיב את החישוב לגזים מולקולריים כשלוקחים בחשבון מעבר אנרגיה בין דרגות חופש טרנסלציה לדרגות חופש פנימיות של המולקולה.

התפשטות קוונטית

החישוב הקוונטום מכני של התפשטות אדיאבטית של גז קוונטי הוא ישיר [3], ומבוסס על "המשפט האדיאבטי" [4], אשר קובע כי בתנאים מסוימים שינוי איטי ורציף של הפרמטרים של מערכת, גורם לשינוי רציף תואם של משוואות הגל ושל רמות האנרגיה שלה, ואינו משרה מעברים בין מצבים שונים.

כדי להראות את הדמיון בין המקרה הקלאסי למקרה הקוונטי, המשפט האדיאבטי יאושר לפוטנציאל מרובע אינסופי חד-ממדי [5].

מצב היסוד של חלקיק בפוטנציאל מרובע אינסופי, שנפרס מ- $x = 0$ ל- $x = L$, יכול להיכתב כקומבינציה של שני גלים שנעים בכוונים הפוכים:

$$\psi(x, t) = (\mathrm{i}/(2L)^{1/2})(e^{-\mathrm{i}(kx + wt)} - e^{\mathrm{i}(kx - wt)}) \tag{16}$$

כאשר $k = \pi/L$ ו- $w = hp^2/2mL^2$. כעת, אם הדופן בגבול ב- $x = L$ נעה לאט במהירות v_M, אז כאשר הגלים מוחזרים ממנו מספר הגל שלהם (והתדירות) יוסטו לפי נוסחת אפקט דופלר:

$$k' = k\,(1 - 2v_M/c) \qquad (17)$$

כאשר $c = w/k$ מהירות הגלים.

במשך מרווח הזמן Δt כל גל *מוחזר* $c\Delta t/2L$ פעמים מהדופן הנעה, כך שההזזה של מספר הגל תהיה:

$$\Delta k = -(kv_M\Delta t/\mathrm{L}) = -\pi\Delta L/L^2 \qquad (18)$$

אם הפוטנציאל המרובע מתרחב מ- L_1 ל- L_2, אז לפי משוואה (18) מספר הגל יוסט מ- π/L_1 ל- π/L_2. לכן, הגל של רמת היסוד ב- L_1 יוסט לגל של רמת היסוד ב- L_2. (בחישוב דומה, התוצאה הזאת נכונה לכל הרמות הגבוהות יותר). במקרה זה התנאי לתהליך אדיאבטי הוא שבהחזרה בודדת הסטת דופלר של מספר הגל (או התדירות) תהיה קטנה יחסית להפרש בין רמות עוקבות.

References

1. Sears. F. W., and Salinger, G. L., "Thermodynamics. Kinetic Theory and Statistical Thermodynamics., "3rd Ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1975, p. 262.
2. Lachish. U., "Derivation of Some Basic Properties of Ideal Gases and Solutions from Processes of Elastic Collisions", J. Chem. Ed., vol. 55 (6), p. 369-371 (1978)
3. Tolman. R. C., "The Principles of Statistical Mechanics", Oxford University Press, New York. 1938, p. 386.
4. Shiff, L. I., "Quantum Mechanic, "3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1968, p. 289.
5. Born, M., "Atomic Physics." 7th Ed., Blackie. London. 1965, pp. 12-24.

On the net: January 2021

Hebrew box

Particles in a box DOI: 10.13140/RG.2.2.18559.12960

Think that this page is correct? Please pass it on to others.